Proč užívat hierarchické lineární modely?*

PETR SOUKUP**
FSV UK, Sociologický ústav AV ČR, Praha

Why Use Hierarchical Linear Models?

Abstract: The article briefly describes multilevel models and presents their simplest applications. After the methodological and statistical need for this procedure is explained, real data are used to demonstrate how a hierarchical linear model is constructed. The article presents models with a random intercept, models with random slopes, and models with explanatory variables measured at higher levels. In the conclusion, other possible applications of multilevel analysis are discussed, and the basic readings on multilevel analysis are presented.
Keywords: research methodology, multilevel analysis, hierarchical linear models, quantitative research, PISA.
Sociologický časopis/Czech Sociological Review, 2006, Vol. 42, No. 5: 987–1012

Cíl článku

Hlavním cílem tohoto článku je objasnit základy víceúrovňového hierarchického modelování[1] a ukázat jednodušší aplikace tohoto přístupu. Jde tedy svým zaměřením o úvodní článek o metodě, která není v České republice příliš známa a její užívání je u nás takříkajíc „v plenkách".[2] K rozšíření znalosti a aplikací této metodologie by měl i přispět tento článek.

* Práce na tomto článku byla umožněna díky grantu Ministerstva práce a sociálních věcí, číslo 1J005/04DP2 „Nerovné šance na vzdělání", byla podpořena též z grantu GA ČR 403/06/1241 „Vzdělanostní mobilita a vzdělanostní nerovnosti v České republice mezi lety 1936 až 2004".
** Veškerou korespondenci zasílejte na adresu: PhDr. Ing. Petr Soukup, katedra sociologie, FSV UK, U Kříže 8, 158 00 Praha 5 - Jinonice, e-mail: soukup@fsv.cuni.cz.

[1] V angličtině se používá několika ekvivalentních termínů: multilevel modeling (nejužívanější), random-coefficient modeling, hierarchical modeling, mixed-effects modeling, covariance components models [Raudenbusch, Bryk 2002: 5–6]. Tyto termíny se zpravidla užívají promiscue jako synonyma, i když se v přísném slova smyslu o synonyma nejedná. Lze říci, že pojem multilevel modeling je nejobecnější a ostatní pojmy označují jen speciální přístupy v rámci víceúrovňového modelování.

[2] V zahraničí naopak víceúrovňové modely nyní dominují, viz varování před nekritickým podlehnutím kouzlu víceúrovňového modelování v závěru článku.

© Sociologický ústav AV ČR, Praha 2006

Využití statistického softwaru pro víceúrovňové modelování

I když to není hlavním cílem článku, sluší se zmínit i o výpočetních aspektech víceúrovňových modelů a softwaru užívaném k jejich aplikaci. Zatímco z počátku jednotliví statistici vyvíjeli speciální akademický software k použití této metody (HLM, MLn, MPlus, MIXOR aj.), od druhé poloviny 90. let došlo k implementaci těchto postupů do komerčně nabízených statistických paketů (jako je např. SAS, STATA, SPSS apod.). Díky tomuto kroku jsou v sociálních vědách v zahraničí tyto modely již poměrně často užívány k řešení nejrůznějších problémů.

V článku ukazuji reálné analýzy v paketu SPSS. Chápu, že je tak aplikovatelnost silně omezena,[3] nicméně aspiruji zde toliko na objasnění základních principů víceúrovňových modelů a ukázku jejich nejjednodušších aplikací.

Základní myšlenky a zdůvodnění víceúrovňových modelů

Víceúrovňové (hierarchické) modely (Multilevel/Hierarchical Models[4]) jsou od druhé poloviny 80. let postupně rozvíjeny a v poslední době také stále více užívány. Je obtížné stručně popsat základní myšlenky víceúrovňových modelů, nicméně lze uvést následující dvě motivace tohoto přístupu, jedná se o:

a) teoretickou a

b) čistě statistickou.

Ad a) Popis teoretické metodologické motivace pro užívání víceúrovňových modelů pochází již od Lazarsfelda a Menzela [Lazarsfeld, Menzel 1965] ve formě kontextuální analýzy. Lazarsfeld si povšiml víceúrovňového charakteru (jiným slovníkem přítomnosti hierarchické struktury) mnohých dat ze sociologického výzkumu. Lazarsfeld také upozornil na skutečnost, že mnohé proměnné nemá smysl měřit na individuální úrovni (micro level), ale na úrovni větších celků (macro level) a že působení faktorů na úrovni jednotlivců a vyšších celků může být různé.

Stručně si tedy připomeňme koncept kontextuální analýzy v duchu výkladu Hoxe [Hox 1995, 2002]. Dle Lazarsfeldova konceptu existují různé úrovně měření proměnných, přinejmenším lze užít členění proměnných do těchto typů: *globální* (global), *vztahové* (relational), *kontextuální* (contextual), *analytické* a *strukturní*. Zatímco na první úrovni (u jednotlivců) má smysl se zabývat prvními třemi typy proměnných, na druhé (a vyšších úrovních) již všemi uvedenými typy. Stručně popišme základní typy „lazarsfeldovských" proměnných. *Globální proměnná* je taková,

[3] SPSS totiž umožňuje pracovat jen se závislou spojitou proměnnou. Pro rozšíření užívání hierarchických modelů jsem připravil i webové stránky (viz http://samba.fsv.cuni.cz/~soukup), kde jsou umístěny i návody pro používání dále uvedených modelů v SAS, STATA a HLM a navíc jsou uvedeny i odkazy na základní servery ve světě a základní software pro tuto metodu.

[4] Viz předchozí stručnou poznámku o jazykových nuancích.

která svou hodnotou vypovídá jen o úrovni, kterou měří bez vztahu k jiným úrovním. Jsou to proměnné, které charakterizují výstižně příslušnou úroveň (například socioekonomický status jedince, nebo velikost rodiny). *Vztahové proměnné* jsou ty, které také charakterizují vlastnosti na příslušné úrovni, nicméně se vztahem k ostatním jednotkám na stejné úrovni (tedy například vztahy mezi jedinci na nejnižších úrovních, vztahy mezi třídami ve škole na vyšších úrovních atd.). *Analytické a strukturní proměnné* jsou konstruovány na vyšších úrovních z proměnných globálních a vztahových (měřených na nižších úrovních) za pomoci sumací a průměrování (obecně procesem agregování). Příkladem těchto proměnných mohou být průměrný socioekonomický status, průměrný počet kontaktů mezi třídami v rámci škol apod. Posledním typem jsou *kontextuální proměnné*, které daly název Lazarsfeldově přístupu. Tyto proměnné vznikají opačně než proměnné analytické, tedy z proměnných globálních měřených na vyšších úrovních procesem opačným k agregování – každé jednotce na nižší úrovni je přiřazena hodnota globální proměnné měřené na vyšší úrovni. Například každý žák má přiřazenu informaci (resp. hodnotu proměnné), zda navštěvuje školu soukromou či státní. A co se stane, pokud zavedení kontextuálních proměnných a přítomnost vyšších úrovní přehlížíme?

Klasickou ukázkou přehlížení fenoménu více úrovní je tzv. *Robinsonův efekt*[5] [Robinson 1950], který *vzniká při izolované práci s agregovanými daty* za větší celky. Například Kreft a de Leeuw ve svém textu o víceúrovňových modelech [Kreft, de Leeuw 1998] uvádějí následující ukázku. Závislost příjmu na vzdělání měřená na individuální úrovni je pozitivní (existuje pravděpodobnostní tendence u lidí s vyšším vzděláním mít vyšším příjem), naopak na úrovni odvětví ekonomiky byl zjištěn negativní vztah mezi průměrným vzděláním a příjmem.[6] Pokud bychom provedli analýzu jen na individuální úrovni, nebo na úrovni odvětví průmyslu, dospěli bychom k jednotlivým zjištěním, věcně naprosto odlišným. Nutno dodat, že oddělená mikro- a makroanalýza je neudržitelná ve světle uvedeného příkladu (při uvědomění si provázanosti mikro- a makroúrovně). Alternativní strategií je zohlednit přítomnost hierarchické struktury dat a využívat v analýze hodnot měřených na mikro- i makroúrovni zároveň a vyhnout se Robinsonovu efektu, tedy chybnému usuzování na základě izolované makroanalýzy.

Ad b) *Víceúrovňové modely* (alespoň ty nejjednodušší) lze chápat ze statistického hlediska jako zobecnění klasické lineární regresní analýzy (ale i logistické, ordinální regrese a mnoha jiných metod). Připomeňme, že jedním ze základních požadavků regresní analýzy je nezávislost jednotlivých pozorování. Tento požadavek však mnohdy již díky designu výzkumu není splněn. Klasickým příkladem jsou em-

[5] Ale lze jmenovat i známý Simpsonův paradox popsaný ve většině učebnic věnovaných analýze kategoriálních dat, česky například u Hendla [Hendl 2004: 330–4]. Souhrnně se tyto efekty v angličtině nazývají ecological fallacies a jejich možná řešení ecological inference.

[6] Vhodným příkladem odvětví s nízkým průměrným příjmem a naopak vysokým vzděláním, jak připomínají Kreft a de Leeuw, je školství, případně vysoké školství. O tom, že je toto platné i v ČR, netřeba zřejmě nikoho přesvědčovat.

pirické studie ze sociologie vzdělání: vybíráme-li v prvním stupni školy a ve druhém třídy a v těchto dotazujeme více žáků, zcela jistě nemůžeme odpovědi/výsledky žáků z jednotlivých tříd/škol považovat za vzájemně nezávislé. Určitě platí, že žáci z jedné třídy, resp. i jedné školy mají mnohé společné oproti žákům z jiných tříd/škol. Obdobné by platilo pro dotazování více osob v jedné lokalitě, v jedné rodině apod. Tedy v mnoha případech není splněn jeden ze základních požadavků regresní analýzy, a tudíž její použití není namístě. Navíc nás může napadnout otázka, co způsobuje rozdíly mezi třídami, školami, rodinami, sousedstvími atd. Všechny tyto problémy jsou řešitelné pomocí zavedení více úrovní – například první úroveň žák, druhá třída, třetí škola atd. Nemodelujeme pak pouze první úroveň (jako v klasické regresi), ale modelujeme každou relevantní úroveň. Nutno dodat, že víceúrovňové modely umí efektivně řešit i mnohé další problémy, jako například analýzu longitudinálních dat, strukturní modely (více se o možných aplikacích zmiňuji v přehledu literatury v závěru článku).

Podrobnější statistická motivace hierarchických modelů

Zkusme podrobněji vysvětlit statistickou motivaci užívání víceúrovňových modelů. Již bylo uvedeno, že jsou *vhodné zejména v případech, kdy nemůžeme jednotlivá pozorování* v rámci jednotlivých skupin *považovat za vzájemně nezávislá*. Na chvilku teď opusťme problém závislých pozorování a zkusme se zamyslet nad možnými případy, které mohou v analytické praxi nastat, pokud provádíme regresní analýzu[7] zvlášť pro dvě skupiny (například pro muže a ženy). Přehled možných výsledků takto provedených regresních analýz nabízejí grafy 1–4.

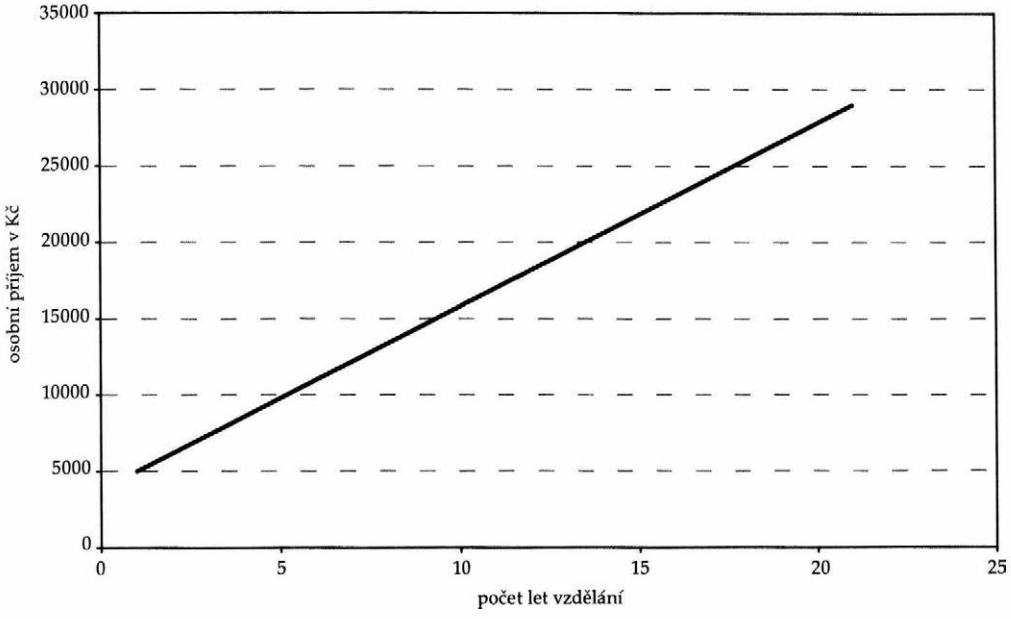
Řekněme si, že pokud chceme za pomoci jedné (agregované) regresní rovnice řešit vztah proměnných (při existenci dvou skupin), potom v případech na grafech 1 a 2 s klasickou regresí vystačíme. V případě zachyceném na druhém grafu je třeba dát do modelu dichotomickou proměnnou zachycující pohlaví[8] a hodnota regresního koeficientu je rovna rozdílu mezi konstantami pro muže a ženy (v matematice se hovoří výstižně o posunutí). Jen připomeňme, že pokud bychom ignorovali přítomnost dvou skupin, výsledná regresní přímka by ležela někde mezi dvěma zobrazenými přímkami (vystihuje ji slabší nepřerušovaná přímka). S jedinou regresí samozřejmě bohatě vystačíme i v případě na grafu 1, zde ani není třeba do regresní analýzy přidávat proměnnou pohlaví. Ihned dodejme, že v praxi jsou případy zachycené na prv-

[7] Pro jednoduchost uvažujeme jednoduchou přímkovou regresi s jednou závislou a jednou nezávislou proměnnou. Obdobné principy platí samozřejmě pro složitější případy, ale jejich grafické zobrazení i formalizace je samozřejmě obtížnější.

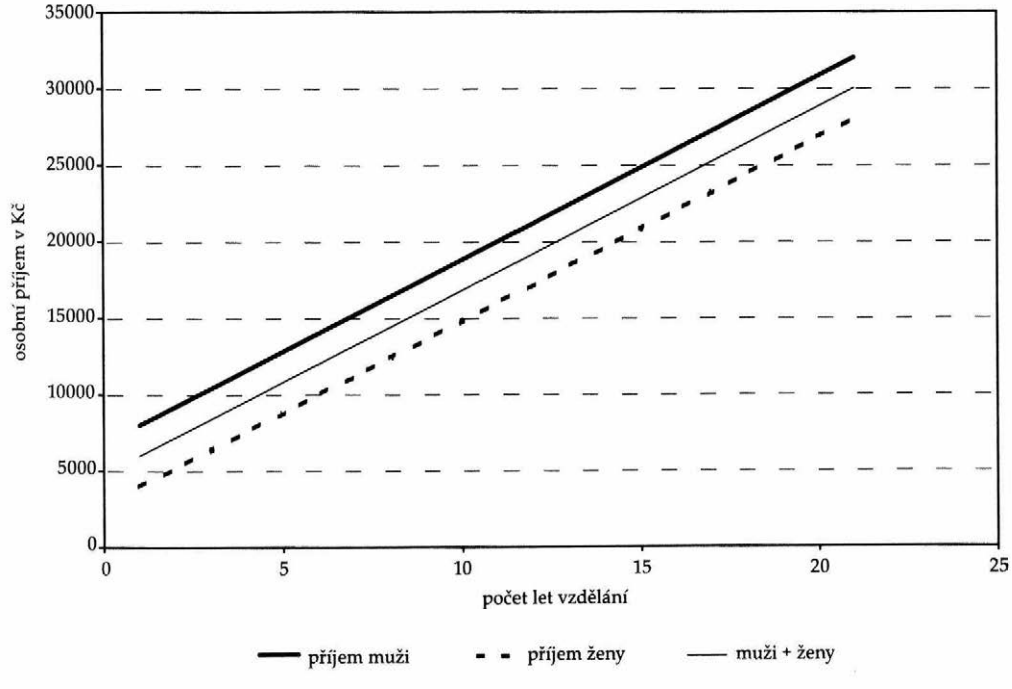
[8] Proměnná může být standardně kódovaná 0 a 1 (připomeňme, že se standardně 1 kódují muži a 0 ženy), popřípadě můžeme kódovat i 1 a 2 (jednička je tradičně vyhrazena pro muže), ale lze kódovat i 0 a 100 apod. Různé kódování pouze změní hodnotu regresního koeficientu, ale nikoliv výslednou interpretaci.

Grafy 1–4. Ukázky různých vztahů mezi příjmem a počtem let vzdělání u mužů a žen

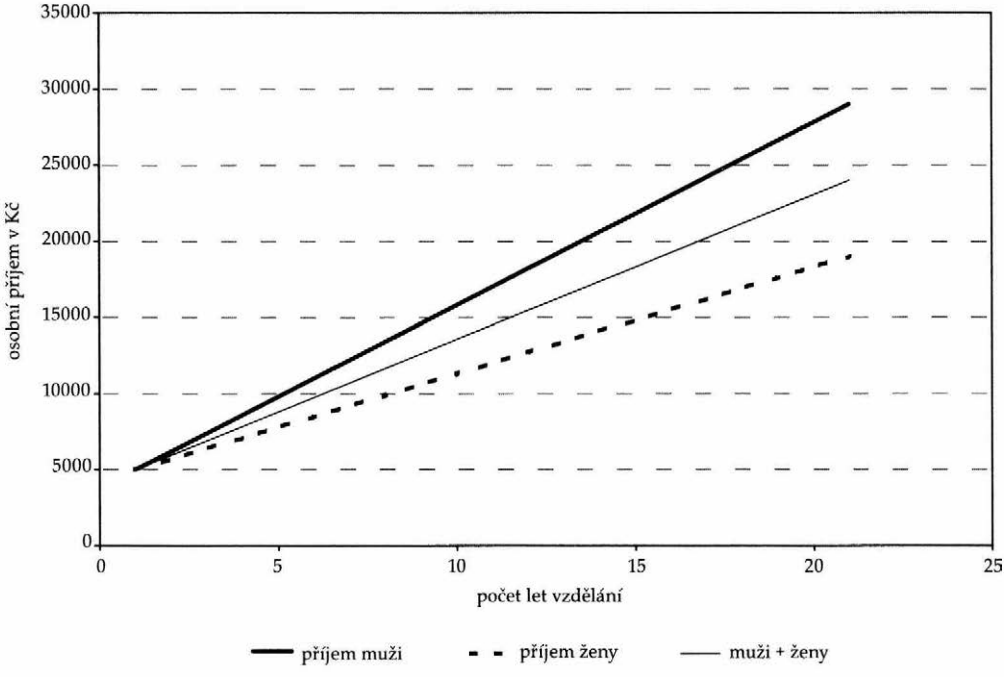
Graf 1. Stejné konstanty i směrnice



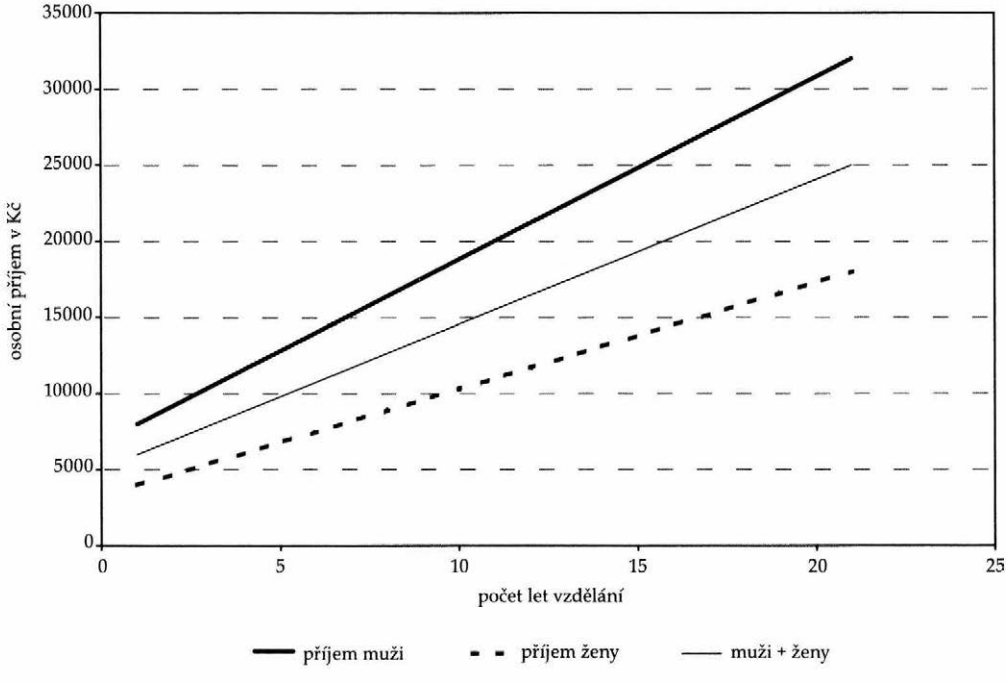
Graf 2. Různé konstanty, stejné směrnice



Graf 3. Stejné konstanty, různé směrnice



Graf 4. Různé konstanty i směrnice



ních dvou grafech ojedinělé. Naopak velmi často se setkáváme s případy na grafech 3 a 4 (resp. nejčastěji s případy na grafu 4). Co se stane, pokud v těchto případech ignorujeme různý vztah pro muže a ženy, naznačují opět slabší nepřerušované regresní přímky. Netřeba nikoho přesvědčovat, že závěry analýz mohou být tímto fenoménem výrazně dotčeny. Připomeňme, že jsme řešili pouze případ dvou skupin, ale v praxi může být skupin samozřejmě mnohem více (vzdělanostní skupiny, ale i například již výše uvedené třídy, školy, regiony apod.). O tom, že v případě více skupin mohou být závěry jediné (agregované) regresní analýzy pouhým podivným smíšením jednotlivých regresí, nemůže být pochyb.

To, co jsme nyní nastínili, tedy provádění jednotlivých regresních analýz, je v podstatě základem víceúrovňového modelování (resp. těch modelů, které jsou zobecněním regresních analýz).[9]

Čtenáře jistě napadá, nač víceúrovňově modelovat, když mohu provést dílčí analýzy pro jednotlivé podskupiny a mám vyhráno. Upozorněme tedy na další výhodu víceúrovňových modelů oproti dílčím analýzám pro jednotlivé skupiny. Pokud budu provádět dílčí analýzy, budu odhadovat pokaždé určitý počet parametrů a při velkém počtu skupin bude celkový počet odhadnutých parametrů velký. Víceúrovňové modelování vystačí s menším počtem parametrů a je tak úspornější.[10] Menší počet parametrů je také výhodný ze statistického hlediska, parametry mají menší směrodatné chyby (jsou přesnější) a výsledky jsou díky tomuto stabilnější.

Zkusme nastínit další statistickou motivaci víceúrovňových modelů. Výše uvedený příklad dvou skupin – mužů a žen (ale i více skupin) – a řešení rozdílu mezi nimi z hlediska jedné či více proměnných je obecně řešitelný za pomoci analýzy rozptylu (jedno nebo vícerozměrné dle počtu závislých proměnných) nebo analýzy kovariance.[11] Co ale dělat v případě, že nejenom naše data jsou výběrem z populace, ale i skupiny, v nichž se vztahy liší, jsou náhodně vybrány ze základního souboru? Příkladem může být náhodný výběr několika škol, ve kterých jsou taktéž náhodně vybráni žáci.[12] Pokud bychom například měli v našem výběru žáky z 10 škol (náhodně vybraných v rámci ČR) a chtěli bychom zjistit, zda se liší výkon mezi jednotlivými školami v oblasti matematických dovedností, bylo by možno použít jednofaktorovou analýzu rozptylu. Závěr by pak mohl znít, že mezi školami existují rozdíly, nebo že

[9] Provedení klasických regresních analýz pro jednotlivé skupiny je vhodným předstupněm víceúrovňového modelování, který nám umožní zjistit, zda se jednotlivé regresní přímky liší ve svých konstantách a/nebo ve směrnicích a jak velké tyto odlišnosti jsou.

[10] Podrobnější argumentace tohoto problému přesahuje záměr článku, nicméně uvedený poznatek přímo plyne z dále uvedených rovnic užívaných ve víceúrovňových modelech.

[11] Tedy metod i v češtině nepěkně označovaných anglickými zkratkami ANOVA, MANOVA a ANCOVA.

[12] Připomeňme, že v teorii výběrových šetření se tento typ nazývá vícestupňový náhodný výběr a tento typ výběru je také základním designem pro víceúrovňové modelování. Tak jako při vícestupňovém výběru sestupujeme postupně z nejvyšších úrovní postupně až k jednotlivci, jdeme ve víceúrovňovém modelování opačnou cestou, od jedince k vyšším celkům (hierarchiím), a tuto strukturu, danou zpravidla již designem výzkumu, plně respektujeme.

se nám rozdíly nepodařilo prokázat. Chceme-li ale zobecnit závěry na všechny školy v ČR a hledat faktory, které způsobují odlišnost škol ve výkonech v matematice, nevystačíme již s výše uvedenou analýzou rozptylu. Úlohu nám opět může pomoci vyřešit víceúrovňové modelování, které se zaměřuje na modelování vztahů na úrovni jedinců (mikroúrovni) i na modelování rozdílů mezi jednotlivými skupinami (tedy na makroúrovních) a zároveň umožňuje zobecnit závěry na celý základní soubor (na všechny jedince i skupiny).

Vnitrotřídní koeficient korelace a jeho výpočet (model 1)

Pokračujme v úvahách o možném využití víceúrovňových modelů a jejich vazbě k jednodušším typům analýzy. Zkusme zodpovědět následující otázku: *Kdy má smysl užívat víceúrovňové modely?* Jedna z možných odpovědí může znít, že tyto modely jsou na místě, když sledovaná proměnná má různé hodnoty (nebo různé vazby k jiným proměnným) u různých jedinců a její průměrná úroveň (či vazby k jiným proměnným) se také liší v určitých větších celcích (skupinách, hierarchiích). Pokud neplatí druhá podmínka, pak víceúrovňová analýza není potřebná.[13] Konstatujme nyní pouze, že odlišnost průměrných úrovní proměnných (resp. jejich vztahů) ve větších celcích je každodenní realitou. A jak tuto realitu změřit? K tomu nám poslouží *vnitrotřídní koeficient korelace,*[14] který ukazuje, nakolik se liší hodnoty proměnné na úrovni jednotlivců a nakolik na vyšších úrovních. Připomeňme, že *koncept rozkladu rozptylu na složku meziskupinovou a vnitroskupinovou* je znám z analýzy rozptylu. Platí pravidlo, že čím větší je první zmíněná složka rozptylu ve srovnání s druhou, tím spíše má třídění do skupin smysl a liší se nejspíš průměrné úrovně jevu ve skupinách. Vnitrotřídní koeficient korelace je pouze jiným vyjádřením této myšlenky. Rozptyl sledované proměnné se rozkládá na rozptyl, který lze přičíst odlišnostem na úrovni jednotlivců, a na rozptyl přičitatelný odlišnostem na úrovni vyšších celků. *Vnitrotřídní koeficient korelace* udává, kolik z celkového rozptylu proměnné připadá na rozdíly mezi vyššími celky. Označíme-li formálně rozptyl na úrovni jednotlivců σ^2_e a rozptyl na úrovni vyšších celků σ^2_u,[15] můžeme napsat vzorec pro výpočet koeficientu následovně:

$$ICC = \frac{\sigma^2_u}{\sigma^2_e + \sigma^2_u} \quad (1.1)\,.$$

[13] V případě, že neplatí první podmínka, nemá smysl vůbec žádné modelování, protože by nešlo o proměnnou, ale o konstantu (za toto upřesnění děkuji jednomu z anonymních recenzentů).

[14] Intra-class correlation coefficient, proto užívám pro jeho označení anglického akronymu ICC.

[15] Jen upozorněme, že v oblasti víceúrovňových modelů je statistické značení stejných veličin u různých autorů jiné (či mírně jiné).

Zvykem bývá udávat hodnotu ICC po vynásobení v procentech, a tento ukazatel tedy udává, jaké procento rozptylu (variability) sledované proměnné lze přičíst rozdílům mezi skupinami (na druhé úrovni hierarchie, například na úrovni škol). Ukažme si na datech z výzkumu PISA 2003 z České republiky,[16] jak vypočítat hodnotu koeficientu v SPSS.[17]

Formální zápis modelu, který není zcela nezbytné pro užívání modelů pochopit, vypadá takto:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + e_{ij} \qquad (1.2),$$

kde Y_{ij} je symbol pro hodnoty závislé proměnné,
u a e jsou náhodné chyby na druhé, resp. první úrovni (připomeňme, že jejich rozptyl se značí σ^2_u a σ^2_e),

[16] Mezinárodní datový soubor je dostupný na webových stránkách [PISA 2003], jde o soubor 15letých žáků, na stejných webových stránkách lze nalézt i bližší informace o výběru, dotazníku a dalších metodologických aspektech (český dotazník a další výzkumné materiály lze nalézt na www.stratif.cz [cit. dne 28. 1. 2006]). Děkuji tímto Janě Strakové za doporučení tohoto souboru a cenné rady při práci s ním. Případným zájemcům zašlu soubor za ČR na vyžádaní.

[17] Proceduru nalezneme v menu *Analyze-Mixed Models-Linear*. Po zadání Continue vybereme jako závislou (dependent) proměnnou wlemath (budeme tedy modelovat rozdíly v matematických dovednostech 15letých žáků v ČR). Jako nezávislou kategoriální proměnnou (Factor) zadáme schoolid. V záložce *Random* přesuneme z levého do pravého okna za pomoci volby Add proměnnou schoolid (tuto volbu, škola jako náhodný efekt, provádíme proto, abychom mohli naše závěry zobecňovat na všechny školy, ne pouze ty, které máme ve výběru; více se volbě náhodného vs. pevného efektu věnujeme v následující části článku) a stiskneme Continue. V záložce *Statistics* zaškrtneme Parameter estimates a Test for Covariance Parametres. Po volbě Continue již máme specifikovaný model, u kterého chceme odhadnout rozptyl vysvětlitelný (připsatelný) na úrovni jednotlivců a škol. Nyní máme dvě volby. Buď stiskneme OK a dostaneme výstupy, nebo zmáčkneme Paste a získáme do syntaxe okna příkaz, který lze spustit po vyčernění společným stiskem kláves CTRL+R. Pro úplnost uveďme tento příkaz:

```
MIXED
  wlemath BY schoolid
  /CRITERIA = CIN(95) MXITER(100) MXSTEP(5) SCORING(1) SINGULAR(0.000000000001)
  HCONVERGE(0, ABSOLUTE) LCONVERGE(0, ABSOLUTE)
  PCONVERGE(0.000001, ABSOLUTE)
  /FIXED = | SSTYPE(3)
  /METHOD = REML
  /PRINT = SOLUTION TESTCOV
 /RANDOM school | COVTYPE(VC).
```

U dalších úloh již bude stručně popisována pouze věcná stránka analýzy. Postupy zadání přes menu, data a příkazy jsou dostupné na webových stránkách autora článku http://samba.fsv.cuni.cz/~soukup/.

Tabulka 1. Odhady složek rozptylu modelu 1

Parameter	*Označení v teorii*[18]	Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual	σ^2_e	6244,42	112,35	55,58	,000
Intercept [subject = schoolid]	σ^2_u	3092,86	385,03	8,03	,000

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

γ_{00} je odhadem střední hodnoty sledované vlastnosti (matematických dovedností) v celém základním souboru a

index *i* značí pořadí jednotky v příslušné skupině (žáka ve škole), index *j* je pořadové číslo skupiny (školy).

Napišme pro lepší porozumění rovnici v našem konkrétním případě:

Matematické dovednosti žáka i ze třídy j = střední hodnota dovedností v celém základním souboru + náhodná chyba třídy j + náhodná chyba u jednotlivého žáka i ze třídy j

Ve výstupu Model Dimension získáváme informaci, že odhadujeme náhodný efekt způsobený školou a rozptyl, který lze připsat jednotlivým žákům (Residual). Model obsahuje pouze konstantu (Intercept), tedy průměrnou odhadnutou úroveň matematických dovedností v celém základním souboru (viz dále), a odhad rozptylu matematických dovedností na první a druhé úrovni (viz tabulku 1):

Zkusme dosadit do výše uvedeného vzorce pro ICC *(3092,86/(3092,86 + 6244,4) = 0,33)*. Po vynásobení stem můžeme konstatovat, že *rozdíly ve výkonech v matematice* (měřené proměnnou mathach) jsou *v ČR z 33 % přičitatelné rozdílům mezi jednotlivými školami.*[19] Dlužno dodat, že zbývající rozptyl výkonnosti žáků (cca 67 %) lze přičíst na vrub různé výkonnosti žáků. Z výpočtu vnitrotřídního koeficientu korelace by mělo vyplynout, zda má smysl pracovat s víceúrovňovým modelem, nebo zda můžeme hierarchii ignorovat. K tomuto rozhodnutí slouží testy uvedené ve čtvrtém a pátém sloupci tabulky 1.[20] Nulová hypotéza těchto testů zní: Rozptyl na příslušné

[18] Tento sloupec samozřejmě není v SPSS obsažen, byl doplněn pro lepší pochopení výstupů z SPSS.

[19] Jen dodejme, že ve výzkumu HSBS provedeném v USA v roce 1980 byl ICC 0,18 [Raudenbusch, Bryk 2002], a lze konstatovat, že rozdíly mezi školami v ČR jsou z tohoto pohledu výrazné. Ostatně o silně stratifikovaném vzdělávacím systému v ČR svědčí mnohé práce českých sociologů, zejména z týmu Sociologie vzdělání a stratifikace Sociologickéhu ústavu AV ČR, např. [Matějů, Straková 2006].

[20] Připomeňme, že Waldův test je založen na podílu odhadu příslušného parametru (v našem případě jde o odhad složek rozptylu) a jeho směrodatné chyby. Pokud se počítá tímto způsobem, má Waldovo kritérium normované normální rozdělení (kritickou hodnotou pro absolutní hodnotu testového kritéria, jejíž překročení signalizuje zamítnutí nulové hypotézy, je

Tabulka 2. Odhady parametrů modelu 1

Parameter	Estimate	Std. Error	df	t	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
Intercept (γ_{00})	531,44	4,71	144,739	112,89	,000	522,13	540,74

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

úrovni je v celé populaci nulový. Připomeňme, že nulovou hypotézu zamítáme na 5% hladině významnosti, pokud počítačem vypočtené Sig. je nižší než 0,05 (toto pravidlo budeme nadále automaticky používat). V našem případě tomu tak je (Sig. = 0,000),[21] variabilitu na úrovni škol (druhé úrovni) nelze tedy ignorovat a je dobré pracovat s víceúrovňovými modely. Samozřejmě tentýž Waldův test je dostupný i pro rozptyl na první úrovni (ten napovídá, zda se máme pokoušet vysvětlovat rozdíly mezi jednotkami na první úrovni za pomoci vysvětlujících proměnných). Dodejme, že pokud bychom nezamítali nulovou hypotézu o neexistenci rozptylu na vyšší úrovni, nemuseli bychom s touto úrovní pracovat, resp. nemuseli bychom vůbec užít víceúrovňové modely.[22] Záměrně jsme stranou ponechali další výstup, který se nám v SPSS zobrazí, a tím je odhad průměrné hodnoty konstanty (průměrných matematických dovedností). Výstup ukazuje tabulka 2.

Vidíme, že průměrná úroveň matematických dovedností je cca 531,44 bodu,[23] a z předchozí diskuse o rozptylech víme, že se úroveň znalostí liší mezi školami (a to nejen mezi těmi, které jsou v našem výběrovém souboru zahrnuty). Dříve, než se začneme zabývat zjišťováním, mezi kterými školami jsou rozdíly a co je způsobuje (modelování na druhé úrovni), zaměříme se na vysvětlení rozdílů mezi žáky (na první úrovni) při respektování existence druhé úrovně (složky u_{0j} a rozptylu σ^2_u v notaci tohoto článku).

klasická hodnota 1,96). Zvykem bývá počítat Waldův test i jako druhou mocninu podílu odhadu parametru a jeho směrodatné chyby (v tom případě má testové kritérium rozdělení chí-kvadrát s jedním stupněm volnosti, kritickou hodnotou je potom 3,84, tedy druhá mocnina z 1,96).

[21] Vzhledem k zaokrouhlování v SPSS znamená hodnota Sig. 0,000, že Sig. je menší než 0,0005.

[22] Samozřejmě za předpokladu, že by nebyla přítomna jiná hierarchická úroveň způsobující rozdíly mezi sledovanými jednotkami.

[23] Poznamenejme, že tento odhad nemusí být obecně roven prostému aritmetickému průměru příslušné proměnné ve výběru.

Model s jednou vysvětlující proměnnou na první úrovni

A) Model s náhodnou konstantou (Model 2)

Z výpočtu složek rozptylu jsme viděli, že existují rozdíly v matematických dovednostech na úrovni jednotlivých žáků i na úrovni škol. Zkusme se nyní pokusit vysvětlit, čím jsou způsobeny rozdíly mezi žáky (tedy na první úrovni) při respektování informace, že žáci jsou z různých škol. Zavedeme jako vysvětlující proměnnou socioekonomický status žáka (SES). Při zavedení vysvětlující proměnné máme dvě možnosti, jak ji definovat: buď jako *fixní efekt*, tedy bez přítomnosti modelování náhodnosti směrnice ve skupinách,[24] nebo jako *náhodný efekt*.[25,26] Detailní diskuse o tom, kdy zvolit kterou variantu, přesahuje výklad v tomto článku, nicméně definujme alespoň přibližné pravidlo: Pokud jsou hodnoty proměnné obsaženy ve výběrových datech všechny (například jsou zastoupeni muži i ženy a víc kategorií pohlaví neznáme), užijme fixní efekty. Pokud tomu tak není, například máme ve výběrových datech jen osoby z náhodně vybraných lokalit a chceme zobecňovat na všechny lokality, nezbývá než definovat vysvětlující proměnnou jako náhodnou. Zkusme nejdříve pracovat se statusovou proměnnou (SES) jako s pevným efektem, abychom viděli rozdílný postup i výsledky ve srovnání s náhodným efektem (viz dále). Pro lepší interpretaci budeme pracovat s centrovanou statusovou proměnnou (místo SES užijeme CSES).[27]

Rovnicové vyjádření druhého modelu je následující:

Model pro první stupeň (v zásadě klasický regresní by vypadal takto):

(1) $Y_{ij} = \beta_{00} + \beta_{01}*(CSES)_{ij} + e_{ij}$.

Na druhé úrovni chceme náhodně modelovat konstantu pro jednotlivé školy a regresní koeficient (směrnici) odhadneme jediným parametrem, formálně lze tedy zapsat rovnice pro konstantu a směrnici:

(2) $\beta_{00} = \gamma_{00} + u_{0j}$

(3a) $\beta_{01} = \gamma_{01}$

Složením tří rovnic dohromady dostáváme výslednou rovnici:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}*(CSES)_{ij} + u_{0j} + e_{ij}$ (1.3),

kde nový symbol γ_{01} udává průměrnou směrnici regresních přímek ve všech školách v celém základním souboru vyjadřující změnu matematických dovedností v závis-

[24] V situaci, která je obdobou modelového grafu 2.

[25] V situaci, která je obdobou modelového grafu 4.

[26] Anglicky fixed or random effect.

[27] Tedy takovou, která má průměr nulový, protože od všech jednotlivých hodnot je odečtena průměrná hodnota původní proměnné. Motivace tohoto postupu je čistě interpretační – konstanta bude po centrování znamenat úroveň matematických dovedností u žáků s průměrným statusem. V případě necentrované proměnné má často konstanta věcně neinterpretovatelnou hodnotu.

Tabulka 3. Odhady fixních parametrů modelu 2

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	df	t	Sig.
Intercept	γ_{00}	530,53	4,05	140,812	130,941	,000
cses	γ_{01}	1,29	,074	6177,130	17,426	,000

Tabulka 4. Odhady složek rozptylu modelu 2

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual	σ_e^2	5980,24	108,86	54,937	,000
Intercept [subject = schoolid]					
Variance	σ_u^2	2248,29	288,98	7,780	,000

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

losti na statusu žáka. Vidíme, že od klasické regresní rovnice se tato rovnice liší pouze tím, že zde kromě parametru pro konstantu (γ_{00} místo klasického β_0) figuruje i náhodná složka u_{0j}, která udává náhodné proměny konstant mezi školami v celém základním souboru.

Podívejme se na odhady parametrů tohoto modelu a vysvětleme si závěry z nich vyplývající.

V první tabulce (tabulka 3) vidíme odhady fixních faktorů (průměrné úrovně konstanty a směrnice v celém základním souboru). Oba parametry jsou statisticky významně odlišné od nuly (Sig. < 0,05). Průměrná úroveň matematických dovedností žáka s průměrným (nulovým) statusem (statusová proměnná je centrovaná) je 530,53. S růstem statusu o jednotku roste úroveň matematických dovedností průměrně o 1,3 bodu. Nyní se zaměřme na druhou tabulku (tabulka 4) a zkusme zodpovědět následující otázky: Jak klesl reziduální rozptyl (na první úrovni) zavedením CSES? A je tento rozptyl nulový? Oproti tabulce 1 (z modelu 1) vidíme relativně mírný pokles reziduálního rozptylu (z 6244 na 5980).[28] Vidíme také, že rozptyl není nulový (Sig. < 0,05 v řádku Residual tabulky 4). Klíčem, jak řešit tuto situaci,[29] může být:

[28] Pozorný čtenář jistě postřehl, že se změnil i rozptyl na druhé úrovni (klesl oproti modelu 1). Toto je bohužel nepříjemný aspekt víceúrovňových modelů – úrovně jsou vzájemně propojeny a změny modelu na jedné úrovni vyvolávají změny i na druhé (či obecně jiné) úrovni. Problémem je, že zavedením proměnné na jedné úrovni může rozptyl na jiné úrovni nejen klesnout, ale i vzrůst.

[29] Situaci, kdy potřebujeme vysvětlit rozptyl závislé proměnné na první úrovni.

a) zavedení další vysvětlující proměnné a/nebo

b) lze zkoumat, zda se také liší směrnice přímek v jednotlivých skupinách.

My zde nebudeme provádět krok a)[30] a vydáme se dále cestou b), necháme tedy náhodně variovat i směrnici, tj. regresní parametr u statusu (γ_{01} u CSES).

B) Model s náhodnou konstantou i směrnicí (model 3)

Upravme předchozí model tak, že statusovou proměnnou budeme nyní považovat za náhodný efekt, neboli budeme zjišťovat, zda se liší směrnice regresních přímek pro jednotlivé školy (opět díky víceúrovňovosti a náhodnému efektu v celém základním souboru). Formálně vypadá tento model následovně:

(1) + (2) Model pro první stupeň a konstantu je stejný jako u předchozího modelu 2, nová je pouze rovnice pro směrnici:

(3b) $\beta_{01} = \gamma_{01} + u_{1j}$.

Složením tří rovnic dohromady opět dostáváme výslednou rovnici:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01} * (CSES)_{ij} + \boldsymbol{u_{1j} * (CSES)_{ij}} + u_{0j} + e_{ij}$ (1.4),

kde nový symbol u_{1j}[31] udává náhodnou chybu směrnic regresních přímek v jednotlivých školách v celém základním souboru (směrnice opět vyjadřují změnu matematických dovedností v závislosti na statusu žáka).

Je zřejmé, že zjištění, zda mezi směrnicemi existuje rozdíl, opět učiníme na základě testu o nulovosti rozptylu příslušné náhodné složky, nyní tedy u_{1j}. Podívejme se na výsledky do tabulky 5.

Z výsledku testu o nulovosti rozptylu náhodné složky směrnic (poslední řádek

Tabulka 5. Odhady složek rozptylu modelu 3

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual	σ^2_e	5967,21	109,71	54,390	,000
Intercept [subject = schoolid]					
Variance	σ^2_{u0}	2257,10	290,78	7,762	,000
cses [subject = schoolid]					
Variance	σ^2_{u1}	,070	,092	,762	,446

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

[30] Dalším velice vhodným prediktorem na první úrovni by bylo například pohlaví žáků.

[31] Tučně budeme vždy značit změnu oproti předchozímu modelu, aby bylo jednoduché se v modelech orientovat a nevysvětlovat je vždy znovu celé.

nadepsaný cses) Sig. = 0,446 můžeme soudit, že směrnice vztahů nejspíše nejsou v různých školách různé (nelze zamítnout hypotézu, že jejich rozptyl se statisticky významně neliší od nuly). Víme již, že se liší jen konstanty regresí, ale nikoliv jejich směrnice. Sluší se ještě poznamenat, že při zavedení náhodných směrnic i konstant lze navíc řešit problém, zda existuje souvislost (statisticky kovariance) mezi velikostí konstant a směrnic v jednotlivých školách. Při použití modelu s kovariancí[32] by výše uvedená tabulka 5 měla o jeden řádek více.

Zavedení proměnných na druhé úrovni (model 4)

Na základě zjištění, že náhodná konstanta a statusová proměnná mají na první úrovni smysl, se již posuneme k vysvětlení rozdílů matematických dovedností za pomoci proměnných na druhé úrovni.[33] Zkusme uvést, jaké otázky budeme řešit: *Lze zjistit, mezi jakými typy škol je rozdíl v konstantách, případně bychom se mohli ptát i na rozdíly ve směrnicích regresních přímek? Jaké proměnné tyto rozdíly ovlivňují? A v kterých školách je průměrná úroveň matematických dovedností (konstanta v regresní přímce) vyšší? Podobně bychom se mohli ptát, ve kterých školách je vliv statusu na dovednosti (tedy směrnice v regresi) vyšší.* A poslední otázkou může být: *Má ve školách s vyššími průměrnými dovednostmi status na tyto dovednosti vyšší vliv?*[34] Postupně budeme odpovídat na jednotlivé otázky a ukazovat zařazování proměnných druhé úrovně do našeho modelu. V závěru ještě zmíníme pravidla pro budování „nejlepšího" modelu a kritéria používaná ke srovnání různých modelů.

Začneme modelem, ve kterém ukážeme, jak pomůže zavedení proměnných na druhé úrovni k vysvětlení rozptylu na úrovni škol (druhé úrovni).[35] Zkusme vybudovat model, kde vysvětlující proměnnou bude typ školy (základní škola nebo víceletá gymnázia - proměnná SKOLA[36]) a dále pak průměrný status žáků v jednotlivých školách (MEANSES).[37] Pro úplnost opět uveďme rovnicový zápis tohoto modelu:

---

[32] V našem případě nemá použití modelu s kovariancí mezi konstantami a směrnicemi smysl, nicméně na svých webových stránkách http://samba.fsv.cuni.cz/~soukup/uvádím i zadání tohoto modelu pro názornost.

[33] Samozřejmě při vědomí, že bychom mohli (resp. spíše měli) pokračovat ještě dalšími kroky v hledání dalších proměnných na první úrovni, které ovlivňují matematické dovednosti žáka. Připomeňme, že v regresní analýze slouží k nalezení „nejlepších" vysvětlujících proměnných např. postup zvaný stupňovitá (stepwise) regrese. S ohledem na převážně edukativní a informativní charakter článku připomínáme, že ponecháme budování „optimálního" modelu s proměnnými na prvním stupni na čtenářích.

[34] Z předchozího modelu 3 (tabulky 5) již tušíme, že odpověď na tuto otázku je záporná.

[35] Zapomeneme teď na chvilku na statusovou proměnnou (CSES) jako prediktor na první úrovni, v dalším modelu se ale již samozřejmě objeví.

[36] Kódování proměnné SKOLA je toto: nula jsou školy základní, jedna víceletá gymnázia.

[37] Připomeňme, že vznikne agregací údajů měřených na první úrovni, z hlediska lazarsfeldovské typologie se jedná o typickou analytickou proměnnou (viz počátek článku).

Tabulka 6. Odhady fixních parametrů modelu 4

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	df	t	Sig.
Intercept	γ_{00}	297,43	20,70	139,218	14,364	,000
Skola	γ_{10}	57,58	6,90	141,799	8,345	,000
Meanses	γ_{20}	4,19	,42	138,355	10,011	,000

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

(1) $Y_{ij} = \beta_{00} + e_{ij}$,

Na druhé úrovni chceme náhodně modelovat konstantu pro jednotlivé školy a regresní koeficient (směrnici) pro proměnné SKOLA a MEANSES odhadneme jediným parametrem, formálně lze zapsat rovnice pro konstantu:

(2) $\beta_{00} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot SKOLA_j + \beta_{20} \cdot MEANSES_j + u_{0j}$.

Spojením obou rovnic do jedné získáme výslednou rovnici:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot SKOLA_j + \gamma_{20} \cdot MEANSES_j + u_{0j} + e_{ij}$ (1.5),

kde koeficienty γ_{10} a γ_{20} udávají závislost velikosti regresní konstanty na sektoru školy a na průměrném statusu žáků ve škole.

Výsledky odhadů parametrů γ (tedy fixních parametrů) pro tento model naznačuje tabulka 6.

Vidíme, že průměrná úroveň matematických dovedností v tomto modelu je 297,4 (statisticky odlišná od nuly, Sig. < 0,05).[38] Lze také konstatovat, že velikost konstanty závisí na sektoru (Sig. < 0,05), ze kterého škola je. Průměrné dovednosti žáků z víceletých gymnázií jsou o 57,6 bodu vyšší (a to je zhruba desetina hodnoty průměrných dovedností). Vliv průměrného statusu je také poměrně výrazný, školy

Tabulka 7. Odhady složek rozptylu modelu 4

Parameter		Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual		6248,21	112,46	55,561	,000
Intercept [subject = school]	Variance	389,18	67,27	5,785	,000

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

[38] Hodnota platná pro žáka ze *základní školy* s nereálným *nulovým průměrným statusem žáků školy*. Vzhledem k tomu, že proměnná MEANSES nabývá v souboru PISA pro ČR hodnot od 36 do 70, má žák z reálné základní školy s nejnižší průměrnou úrovní statusu průměrné matematické dovednosti 297,4 + 36*4,2 = 448,6. Dodejme, že původní statusová proměnná SES měřená indexem ISEI, na základě jejíž agregace vznikne MEANSES, má klasickou škálu 16–90.

se statusem o jednotku vyšším mají průměrnou úroveň znalostí žáků o 4,2 bodu vyšší (viz 2. sloupec řádku nadepsaného *meanses*). A nyní se podívejme, zda zavedení proměnných druhé úrovně pomohlo vysvětlit rozptyl matematických dovedností na druhé úrovni ve srovnání s prvním modelem. Výsledky odhadů složek rozptylu pro čtvrtý model ukazuje tabulka 7.

Ve srovnání s modelem 1 vidíme patrný pokles rozptylu na druhé úrovni (z 3092,9 na 389,2), zhruba o 87 %. Nicméně stále platí, že rozptyl na druhé úrovni není nulový (Sig. < 0,05) a bylo by možné hledat další proměnné na této úrovni.[39]

Model s náhodnou konstantou a proměnnými na první i druhé úrovni (model 5)

V posledním modelu jsme zapomněli na výsledky dosažené při zařazování proměnných na první úrovni, konkrétně na statusovou proměnnou CSES. Zkombinujme nyní model 2 (s náhodnou konstantou a vysvětlující proměnnou první úrovně CSES) a model 4 (s vysvětlujícími proměnnými MEANSES a SKOLA na druhé úrovni). Rovnicový zápis tohoto modelu je velice podobný modelu 4, odlišnosti vyplývající ze zařazení CSES najdeme pouze v první a výsledné rovnici a dále v zavedení další rovnice na druhé úrovni pro proměnnou CSES (viz změny tučně vyznačené):

(1) $Y_{ij} = \beta_{00} + \beta_{01} * (CSES)_{ij} + e_{ij}$.

Na druhé úrovni chceme náhodně modelovat konstantu pro jednotlivé školy a směrnici pro CSES odhadneme jediným parametrem, formálně lze rovnice pro konstantu a směrnici zapsat:

(2) $\beta_{00} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot SKOLA_j + \gamma_{20} \cdot MEANSES_j + u_{0j}$

(3a) $\boldsymbol{\beta_{01} = \gamma_{01}}$

Spojením obou rovnic do jedné získáme výslednou rovnici:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \boldsymbol{\gamma_{01}} * (CSES)_{ij} + \gamma_{10} \cdot SKOLA_j + \gamma_{20} \cdot MEANSES_j + u_{0j} + e_{ij}$ (1.6).

Podívejme se opět na výsledné odhady tohoto modelu dle tabulek 8 a 9:

Z první tabulky (tabulka 8) vidíme, že odhad koeficientu u proměnné SKOLA je v zásadě stejný jako u modelu 4 (viz tabulku 6). Pokud se podíváme na hodnotu regresního koeficientu u statusové proměnné CSES a srovnáme ji s modelem 2 (modelem bez proměnných na úrovni školy), vidíme, že opět nedošlo téměř k žádné změně. U agregované statusové proměnné MEANSES došlo k poklesu díky zahrnutí její zdrojové proměnné z první úrovně (CSES). Porovnání složek rozptylu hovoří o tom, že stále zůstává na první i druhé úrovni část rozptylu nevysvětlena (při porovnání s prvním modelem bez vysvětlujících proměnných). Můžeme říci, že výrazně úspěšnější jsme byli při vysvětlení rozptylu na druhé úrovni (viz diskuse o jeho

[39] V tomto procesu nebudeme pokračovat, nicméně je patrné, jakým směrem se má vydat budování modelu na druhé úrovni. Pouze dodejme, že oba prediktory SKOLA i MEANSES jsou velice silné samostatně. Například pokud zařadíme na druhou úroveň pouze proměnnou SKOLA, má složka rozptylu na této úrovni hodnotu 783, tedy oproti nulovému modelu přinese zařazení proměnné SKOLA snížení rozptylu o 75 %.

Tabulka 8. Odhady fixních faktorů modelu 5

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	df	t	Sig.
Intercept	γ_{00}	359,70	21,13	149,419	17,024	,000
skola	γ_{10}	57,20	6,91	141,213	8,276	,000
meanses	γ_{20}	2,99	,43	147,581	7,005	,000
cses	γ_{01}	1,20	,075	6035,967	15,967	,000

Tabulka 9. Odhady složek rozptylu modelu 5

Parameter	Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual	5982,04	108,89	54,935	,000
Intercept [subject = school] Variance	396,35	5,85	,000	,000

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

snížení u modelu 4).[40] Zkusme tedy zjistit, zda nejde tuto situaci vylepšit tím, že se budeme snažit za pomoci proměnných druhé úrovně vysvětlovat změny v regresních směrnicích u proměnné CSES.

Model s náhodnou konstantou i směrnicí a proměnnými na první i druhé úrovni (model 6)

Oproti předchozímu modelu budeme modelovat na úrovni škol i směrnici regresí matematických dovedností v závislosti na statusu za pomoci proměnných SKOLA a MEANSES. Zároveň necháme ještě regresní směrnice náhodně variovat (dodáme náhodnou chybu u_{1j} jako u modelu 3). Formální zápis modelu je podobný jako u modelu 5, uveďme proto pouze odlišnou třetí a výslednou rovnici (v ní opět změny značíme tučně).

(3b) $\beta_{01} = \gamma_{01} + \boldsymbol{\gamma_{11}}.\boldsymbol{SKOLA_j} + \boldsymbol{\gamma_{21}}.\boldsymbol{MEANSES_j} + \boldsymbol{u_{1j}}$

Spojením rovnic (1) a (2) modelu 4 a rovnice (3b) do jedné získáme výslednou rovnici:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}*(CSES)_{ij} + \gamma_{10}.SKOLA + \gamma_{20}.MEANSES + u_{0j} + \boldsymbol{\gamma_{11}}.\boldsymbol{SKOLA_j}.\boldsymbol{CSES_{ij}} + \boldsymbol{\gamma_{21}}.\boldsymbol{MEANSES_j}.\boldsymbol{CSES_{ij}} + \boldsymbol{u_{1j}}.\boldsymbol{CSES_{ij}} + e_{ij}, \quad (1.7).$$

Ze zápisu vidíme, že se v modelu objevují interakce, tedy společné působení proměnných na první i druhé úrovni. Teoreticky by bylo možné zařadit interakce všech proměnných se všemi, včetně trojné interakce, nicméně tento krok by nám přinesl

[40] Dodejme, že tato situace je pro modely ze sociologie vzdělání typická.

Tabulka 10. Odhady fixních faktorů modelu 6

Parameter	*Označení v teorii*	Estimate	Std. Error	df	t	Sig.
Intercept	γ_{00}	358,35	21,00	150,413	17,059	,000
skola	γ_{10}	61,83	7,01	153,846	8,824	,000
meanses	γ_{20}	3,04	,42	148,897	7,158	,000
cses	γ_{01}	2,94	,82	151,600	3,592	,000
cses * skola	γ_{11}	–,33	,27	160,985	–1,224	,223
cses * meanses	γ_{21}	–,032	,02	147,466	–1,965	,051

Tabulka 11. Odhady složek rozptylu modelu 6

Parameter		Estimate	Std. Error	Wald Z	Sig.
Residual		5961,80	109,45	54,472	,000
Residual		5961,80	109,45	54,472	,000
Intercept + cses [subject = school]	UN (1,1)	387,82	66,83	5,803	,000
	UN (2,1)	-,24	1,75	-,135	,893
	UN (2,2)	,029	,085	,339	,734

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

informaci o tom, že neuvedené interakce nejsou významné a z modelu by měly být vyřazeny. Výsledky modelu opět vyčteme z tabulek (tabulka 10, 11):

V první tabulce jsou nově oproti modelu 5 odhady parametrů interakcí mezi proměnnými první a druhé úrovně (poslední dva řádky tabulky 10). Zkusme si opět interpretovat tyto nové hodnoty. Hodnota interakce SKOLA*CSES (–0,33) nám říká, že u víceletých gymnázií (SKOLA = 1) je hodnota směrnice nižší než u základních škol. Nicméně vzhledem k tomu, že test statistické významnosti nezamítá hypotézu o nulovosti tohoto efektu, je možné, že směrnice závislosti dovedností na statusu jsou nejspíš v gymnáziích i na základních školách totožné. Zaměřme se proto na interpretaci druhé interakce (CSES*MEANSES = –0,03). Ve školách, které mají o jednotku vyšší než průměrný status žáků,[41] mají regresní směrnice hodnotu 2,91 (= 2,94 – 0,03). Platí tedy, že ve školách s vyšším průměrným statusem existuje nepatrně slabší vazba mezi statusem žáků a jejich matematickými dovednostmi a vice versa.[42]

[41] Za jinak stejných podmínek.

[42] Nicméně tento výsledek je platný na hraně statistické významnosti (Sig. = 0,051) a navíc vzhledem k velikosti je zcela jistě věcně nevýznamný. Je zmíněn pouze z důvodu, aby byla jasná interpretace interakčních efektů.

Zaměřme se ještě na tabulku s odhady složek rozptylů, která má nyní o dva řádky více než předchozí uvedené obdobné tabulky. Komentář si zaslouží dva poslední („nové") řádky. Poslední řádek (nadepsaný UN (2,2)) udává rozptyl náhodně variující regresní směrnice v jednotlivých školách. Z výsledku (Sig. = 0,734) můžeme usoudit, že rozptyl regresních směrnic po vysvětlení pomoci proměnných SKOLA a MEANSES již není staticky významný od nuly.[43] Tedy poté, co hodnotu regresní směrnice statusové proměnné vysvětlujeme za pomoci proměnných druhé úrovně (MEANSES a SKOLA), není třeba nechat regresní směrnice náhodně variovat a mohli bychom směrnice (proměnnou CSES) definovat jako fixní faktor. Pozornost si zaslouží i předposlední řádek tabulky (nadepsaný UN (2,1)). Udává hodnotu a test nulovosti kovariance mezi konstantami a regresními směrnicemi v jednotlivých školách. Z výsledku testu (Sig. = 0,893) lze uzavřít, že není důvod si myslet, že hodnoty konstant a směrnic v jednotlivých školách jsou na sobě závislé. O závislost by naopak šlo v případě, kdyby ve škole s vyšší průměrnou úrovní matematických dovedností byla silnější vazba dovedností na status (pozitivní závislost), nebo naopak by vazba dovedností na status byla slabší (negativní závislost). Dodejme, že dalším krokem v modelování by bylo vyřazení proměnné CSES jako náhodného faktoru (a tím by došlo i k vyřazení popisované nulové kovariance).

Stručné shrnutí pravidel pro budování víceúrovňových modelů a kritéria k porovnání modelů

Poté, co jsme zkusili na datech ukázat postupný proces víceúrovňového modelování, shrňme doporučený postup pro budování víceúrovňového modelu:

1. Nejdříve zařadit proměnné na první úrovni jako fixní efekty. Jen ty, co mají opodstatnění v modelu, a jejichž testy vychází významné, ponechat v modelu.
2. Poté zkusit, zda nemají být některé z proměnných na první úrovni definovány jako náhodné (tedy, zda složka rozptylu pro tyto proměnné je nenulová).
3. V dalším kroku se pokusit vysvětlit rozptyl na druhé úrovni (zejména rozptyl náhodných efektů první úrovně za pomoci proměnných, které přísluší druhé úrovni (za pomoci interakcí a odhadu parametrů proměnných z druhé úrovně).

Samozřejmě, že v případě tří[44] a více úrovní se tento postup komplikuje a zcela přesahuje možné záměry tohoto článku. Nutno také poznamenat, že v praxi je také větší počet úrovní nevyužitelný zejména s ohledem na velikost výběrových souborů.

Při budování modelu jsme se opírali o jednotlivé statistické testy fixních a náhodných parametrů. Pro porovnání kvality jednotlivých modelů však slouží i různé

[43] Tento poznatek ale vyplýval již z tabulky 5 modelu 3.

[44] To je maximum úrovní, se kterými umí pracovat SPSS. Nicméně existují softwarové produkty, které umí zpracovávat úrovní mnohem více, například Longfordův VAR9 může pracovat až s devíti úrovněmi.

Tabulka 12. Kritéria pro porovnání kvality modelů (AIC, BIC)

Kritérium/Model	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6
Akaike's Information Criterion (AIC)	73702,712	71810,628	71811,953	73442,068	71592,876	71585,208
Schwarz's Bayesian Criterion (BIC)	73716,217	71824,089	71832,145	73455,572	71606,337	71612,127

Zdroj: PISA 2003 (data pro ČR), n = 6340.

souhrnné ukazatele, nejznámějšími jsou zřejmě Akaikovo a Schwarzovo Bayesovské informační kritérium (tedy i z regrese známá AIC a BIC).[45] Tyto hodnoty SPSS v rámci víceúrovňových modelů standardně počítá a platí, že čím je nižší hodnota kritérií, tím je model lepší.[46] Uveďme pro srovnání hodnotu těchto kritérií pro šest námi provedených modelů (viz tabulku 12).

Z hodnot uvedených v tabulce je patrné, že nejmenší hodnoty prvního kritéria (AIC) dosahuje poslední model 6, u druhého kritéria (BIC) předposlední model 5.[47] Protože běžně preferujeme modely jednodušší, je zřejmě na místě považovat za lepší model 5, což ostatně naznačily i testy nevýznamných (či na hranici významnosti se pohybujících) interakcí a testy složek rozptylu pro směrnici a kovarianci mezi směrnicemi a konstantami. Model 5 je pro naše data nejvhodnější s tím, že z testů u modelu 6 vyplývá, že zařazení interakce CSES*MEANSES by ještě mohlo model vylepšit (poznamenejme, že takový model by byl opravdu lepší).

Závěrem stručně o výběrech a jejich velikostech

Jak již bylo poznamenáno, je postup ve víceúrovňovém modelování opačný vůči postupu vícestupňového výběru. Stručně se zamysleme nad tím, jak se takový výběr provádí. Postupně jsou náhodně vybírány jednotky na nižší a nižší úrovni. Čistě teoreticky může být úrovní mnoho, v praxi však vystačíme se dvěma či třemi stupni. Abychom mohli stanovit doporučení pro velikost výběrového souboru při užití ví-

[45] SPSS počítá ještě hodnoty dalších dvou informačních kritérií (Hurvich a Tsai, Bozdogan) a dále logaritmus věrohodnostní funkce. Detailní diskuse těchto dalších kritérií však již výrazně přesahuje možnosti tohoto článku. Zájemce lze odkázat na literaturu uvedenou v sekci *Přehled základní učební literatury...* na konci článku.

[46] Neplatí to ovšem ve všech softwarech, například v SASu je to opačně.

[47] Důvodem rozdílného hodnocení je skutečnost, že Rafteryho kritérium BIC ve srovnání s Akaikovým AIC výrazněji penalizuje modely s více parametry a upřednostňuje jednodušší modely.

ceúrovňových modelů, použijme poučky známé z lineární regrese. Pravidlo tradované učebnicemi regresní analýzy zní: Velikost výběru by měla být minimálně 10krát větší než odhadovaný počet proměnných. Uvědomme si, že pokud modelujeme víceúrovňově, pak by v každé skupině na prvním stupni při zařazení jedné proměnné mělo být alespoň 10 pozorování (při dvou proměnných dvacet atd.) a navíc na vyšší úrovni bychom také potřebovali mít alespoň 10 skupin pro možné další odhady. Z těchto důvodů ve víceúrovňových modelech pro korektní práci s daty potřebujeme mnohastovkové či lépe mnohatisícové výběrové soubory optimálně vybrané náhodně a vícestupňově. Netřeba se rozepisovat o tom, že se nacházíme spíše v říši bájí a pohádek. Případné zájemce o detailnější doporučení pro velikost výběrových souborů můžeme odkázat na pravidla formulovaná Hoxem [Hox 2002].

Varování aneb nepodlehněme kouzlu víceúrovňového modelování

Z předchozího pojednání o výběrových souborech vyplynulo, že v praxi se příliš často s daty vhodnými k víceúrovňovým modelům nesetkáme. To ale samozřejmě sociálním vědcům v zahraničí nebrání s těmito postupy pracovat v míře téměř závratné. Dokonce bych se nebránil označení, že v současnosti je víceúrovňové modelování v zahraničí jakýmsi módním sociálněvědním trendem.[48] Když autor neví, co si počít se svou analýzou, zahrne druhou a třetí úroveň a rázem získává (i nesmyslná) analýza nový smysl. Nepodlehnout tomuto trendu v České republice bude nadmíru obtížné, vždyť neofilií trpí celá společnost, jak by se jí tedy mohli vyhnout ti, co společnost zkoumají. Nicméně rozhodně by nemělo platit modifikované klasické rčení: „Nevím, co budu zkoumat, ale rozhodně vím, že použiji víceúrovňové modelování."

Smířlivé zakončení aneb v čem spočívají přednosti víceúrovňových modelů

Vyznění článku, kde se ukazuje, jak užívat víceúrovňové modely, by nemělo být nadmíru pesimistické. A předchozí odstaveček příliš optimismem nehýřil. Proto si stručně ukažme, jaké další aplikace lze za pomoci víceúrovňových modelů provádět a jaký je jejich přínos pro analýzu dat ve srovnání s dosud užívanými přístupy. V úplném závěru pak podáme stručný přehled základní literatury o víceúrovňovém modelování.

První aplikací jsou *modely růstu* (growth models). Jde o modely, které vysvětlují změny u jedinců v čase. Zkusme stručně vyložit jejich obdobu ke klasickému dvouúrovňovému modelu typu žák-škola. U modelu růstu máme změřenou určitou

[48] Je evidentní, že rychle roste podíl článků a příspěvků na konferencích používajících tuto metodu, exaktní sledování tohoto fenoménu ale není cílem článku. Nadužívání přístupu vystřídalo onehdy módní strukturní modelování, které vytlačilo explorační faktorovou analýzu, a tak by bylo možné zřejmě pokračovat dále.

vlastnost ve více časových okamžicích u různých jedinců. Měření v různých časových okamžicích můžeme považovat za první úroveň (stejně jako jednotlivé žáky ve škole) a jedince za druhou úroveň (jako školní úroveň u modelu s žáky). Výsledkem modelů růstu může být jednak zjištění, zda obecně dochází k nárůstu či poklesu sledované vlastnosti, zda se jedinci liší v růstových křivkách mezi sebou (podobně jako se mohou lišit školy mezi sebou v matematických dovednostech), a navíc můžeme i zjišťovat, čím jsou způsobeny rozdíly mezi růstovými křivkami různých jedinců (podobně jako za pomoci typu školy vysvětlujeme rozdíly mezi školami). Pro lineární růstové křivky lze využít i paket SPSS, pro nelineární pak musíme užívat jiné softwarové produkty. Ve srovnání s klasickým modelováním růstových křivek za pomoci jednoduché regrese je při využití víceúrovňových modelů výhodou, že nevadí, pokud některá pozorování pro určité časové okamžiky u jednotlivých respondentů chybí. Dokonce ani nevadí, pokud jsou jednotliví respondenti měřeni v různých okamžicích. Tato vlastnost je nadmíru příznivá, zejména vzhledem k problematické práci s chybějícími hodnotami a jejich náhradami v klasických regresních metodách.

Další velice zajímavou aplikací víceúrovňových modelů je *metaanalýza*, která by si zasloužila samostatný článek[49] nebo spíše monografii, v zahraničí např. [Hedges, Olkin 1985]. Víceúrovňovost metaanalýzy spočívá v tom, že na první úrovni máme výsledky z jednotlivých výzkumů (v lepším, ale zpravidla nereálném případě, samotná data) a druhou úrovní jsou jednotlivé výzkumy. Základním cílem je jednak najít společný („průměrný") výsledek všech nalezených studií a také odhalit příčiny rozdílů mezi studiemi. Velice zajímavou aplikaci metaanalýzy zaměřenou na vysvětlení různých výsledků u různých metod sběru dat popisují Hox a de Leeuw [Hox, de Leeuw 1994]. Dlužno podotknout, že SPSS s modelem pro metaanalýzu (nemáme-li původní data) pracovat neumí, a troufám si předvídat, že v dohledné době ani umět nebude. Zvláštní softwarové produkty pro víceúrovňové modelování toto samozřejmě zvládnou bez větších problémů.

Poslední přístup ve víceúrovňových modelech, který v tomto přehledu zmíníme, jsou *modely se smíšenými hierarchiemi* (cross classified). Při vývoji klasických víceúrovňových modelů si mnozí rychle povšimli, že jedinec není zařazen jen do jedné skupiny, která ho výrazněji ovlivňuje, ale do mnoha skupin. Zejména sociologové, k jejichž základním krůčkům v oboru patří poznatky o skupinách a jejich druzích, nejsou tímto nijak překvapeni. Metodologicky však tato skutečnost znamená, že se námi nastíněný problém komplikuje, a tudíž u jedince musíme brát v potaz jeho příslušnost ve více skupinách (či hierarchiích ve slovníku metodologickém). Tyto modely jsou samozřejmě formálně mnohem složitější než v článku představené hierarchické modely, ale bohužel realitě mnohem bližší. Dodejme, že SPSS tento typ modelů umí také řešit.

[49] Dobrý přehled o metaanalýze lze získat například z webové prezentace [Ling 2002]. Česky se lze o metaanalýze dočíst zejména v Hendlově učebnici [Hendl 2004].

Přehled základní učební literatury o víceúrovňovém modelování a přehled řešených problémů

Díky tomu, že teorie i praktické zpracování víceúrovňových modelů jsou již rozvíjeny zhruba 20 let, existuje v zahraničí několik základních učebních textů, pocházejících zpravidla z devadesátých let (a v novém tisíciletí vydaných opětovně v upravené či nezměněné podobě). Jen připomenu, že v České republice neexistuje žádný hlubší text o těchto modelech.[50] Na tomto místě uvedu přehled čtyř základních textů, které jsou v oblasti víceúrovňových modelů zřejmě nejužívanější a zároveň dostupné i v knihovnách v České republice.[51]

Prvním textem je již zmíněná kniha [Kreft, de Leeuw 1998]. Jde o knihu profesorky a profesora z americké University of California Los Angeles (UCLA), která je určena pro úvodní kurz o víceúrovňových modelech. Poměrně útlá kniha (cca 140 stran) se záměrně vyhýbá téměř veškerému matematickému aparátu a na jednotlivých příkladech ukazuje možné jednoduché aplikace víceúrovňových modelů (zejména dvoúrovňových se spojitou závislou proměnnou). V poslední kapitole věnované často kladeným otázkám (FAQs) se autoři věnují mírně pokročilejším problémům a dávají některá doporučení pro praktickou víceúrovňovou analýzu.

Dalším textem v pořadí (zejména z hlediska obtížnosti výkladu a použitého matematického aparátu) je text dvou nizozemských profesorů Snijderse a Boskera [Snijders, Bosker 1999]. Tato kniha je poměrně uceleným textem nejen o jednoduchých víceúrovňových modelech, které jsou zobecněním klasické lineární regrese s jednou závislou kardinální proměnnou, ale obsahuje i složitější *nelineární modely (model s dichotomickou, ordinální a nominální závislou proměnnou), modely s více závislými proměnnými* (multivariate multilevel models), modely s kříženým vlivem jednotlivých úrovní (cross-classified models) a víceúrovňové modely pro longitudinální analýzu. Kniha obsahuje zejména hodnotné výklady (přesahující učebnicový charakter) o problému závislosti jednotlivých úrovní a doporučení týkající se výběrových metod vhodných pro víceúrovňové modely.

Další text je opět z pera holandského mistra statistika, profesora Hoxe [Hox 2002].[52] Obsah knihy je formálně velice podobný knize Snijderse a Boskera popsané výše, nicméně formální matematická úroveň (a tudíž i požadavky kladené na čtenáře/uživatele) je v Hoxově díle vyšší.[53] Hoxův text také obsahuje některé další možné aplikace víceúrovňových modelů zejména v oblasti *víceúrovňových strukturních modelů* a teorii položkové analýzy (IRT Theory). Celá kniha je velice dobrá, nicméně

[50] Z dostupných textů lze doporučit krátké pojednání o této problematice Hendla [Hendl 2004] a Hamplové [Hamplová 2005].

[51] Následující přehled není zcela jistě vyčerpávající, ale nahrazuje neexistující recenze jednotlivých knih a může být i jistým návodem k samostudiu víceúrovňových modelů.

[52] Předchozí verze knihy [Hox 1995] je dostupná na webové adrese http://www.geocities.com/joophox/ [cit. 11. 4. 2006].

[53] Sám Hox ale tvrdí na svých webových stránkách (viz poznámku výše) opak.

zřejmě stěžejními částmi vzhledem k autorově orientaci (jde o psychologa-metodologa) jsou části o metaanalýze a teorii položkové analýzy (tuto oblast vzhledem k úzké vazbě na psychologii naprosto opomíjím).

Čtvrtým textem, jistě nejobsáhlejším a nejkomplexnějším (kniha čítá téměř 500 stran), je kniha profesorů Raudenbusche a Bryka [Raudenbusch, Bryk 2002]. Kniha má ryze učebnicový charakter a každý problém bohatě ilustruje na příkladech. Z teoretického hlediska trpí kniha jedním nešvarem, a sice tím, že mnohdy místo teoretických výkladů upřednostňuje praktické aplikace v jednom jediném softwaru (a to sice v HLM).[54] Autoři poměrně podrobně popisují budování dvou a tříúrovňových lineárních i nelineárních modelů a jejich užití v analýze vlivu institucí a longitudinální analýze. Kniha obsahuje i modely s více závislými proměnnými, modely s kříženým vlivem jednotlivých úrovní a využití víceúrovňových modelů pro metaanalýzu (tato aplikace víceúrovňových modelů pochází od autorů knihy). Speciální problémy obsažené v knize zahrnují i víceúrovňovou aplikaci teorii položkové analýzy a *práci s chybějícími hodnotami ve víceúrovňové analýze* (mimochodem tento problém je v české odborné literatuře zatím ponechán i na jedné úrovni zcela bez povšimnutí). *Speciální pozornost* je v knize věnována *bayesovským metodám odhadu* a teorii statistických odhadů vůbec. Zejména v této oblasti přesahuje tato kniha svůj mnohdy přehnaně učebnicový charakter.

Samozřejmě existuje mnoho časopiseckých článků k tématu a sborníků o nejnovějších poznatcích, nicméně není cílem tohoto článku být přehledovou statí dosaženého poznání v oboru víceúrovňových modelů.[55]

Jen dodám, že pro podrobnější pochopení víceúrovňových modelů je nezbytné předchozí studium textů věnovaných jednotlivým metodám, jejichž zobecněním je víceúrovňové modelování, tedy zejména klasické regresní analýzy [např. Fox 1997; Draper, Smith 1998; Jobson 1991], dále textů věnovaných logistické regresi [např. Hosmer, Lemeshow 2002; Long 1997; Menard 2002; Řeháková 2000]. Samozřejmě pro detailní pochopení je nutné pozornost věnovat i literatuře z oblasti matematické statistiky (zejména teorii odhadů), matematiky (zejména vektorové algebře a diferenciálnímu počtu) atd. Nicméně ten, kdo chce víceúrovňové modely používat, vystačí při jejich studiu s prohloubením základních znalostí lineární a logistické regrese, případně i dalších běžných statistických metod.

Závěrečný přehled aplikací a literatury byl snad dostatečným pozváním do říše víceúrovňových modelů a zároveň také výzvou pro další autory, aby tyto přístupy a jejich aplikace přiblížili českým čtenářům.

---

[54] Vzhledem k tomu, že autoři knihy jsou zároveň i autory softwaru není se vlastně ani čemu divit. Nicméně vazba na jeden software, popřípadě na jeho jednu verzi je pro statistickou knihu škodlivá, protože rychleji zestárne a stane se méně použitelnou.

[55] Nutno poznamenat, že existují samozřejmě i knihy dalších autorů shrnující poznatky v oblasti víceúrovňových modelů. Velmi citované jsou zejména tituly [Goldstein 2003; Longford 1993]. Tyto knihy však operují již poměrně složitě s matematickým aparátem, a proto je nelze pro prvotní seznamování se s metodou doporučit (jsou pro pokročilé uživatele).

PETR SOUKUP *se soustředí na výuku a aplikace statistických metod, zejména na multivariační analýzu dat, problematiku neparametrických metod a malých výběrů. Z věcného hlediska se zaměřuje na oblast sociologie vzdělání a environmentální sociologii.*

Literatura

Draper, N. R., H. Smith. 1998. *Applied regression analysis.* 3rd Edition. New York: Wiley.

Fox, J. 1997. *Applied regression analysis, linear models, and related methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Goldstein, H. 2003. *Multilevel Statistical Models.* 3rd Edition. London: Edward Arnold.

Hamplová, D. 2005. „Základní principy víceúrovňových modelů." *SDA info* 7 (2): 1–2.

Hedges, L. V., I. Olkin. 1985. *Statistical Methods for Meta-Analysis.* New York: Academic Press.

Hendl, J. 2004. *Přehled statistických metod zpracování dat: analýza a metaanalýza dat.* Praha: Portál.

Hosmer, D., S. Lemeshow. 2000. *Applied Logistic Regression Analysis.* New York: Wiley.

Hox, J. 1995. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications.* Amsterdam: TT Publikates.

Hox, J. 2002. *Applied Multilevel Analysis: Techniques and Applications.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hox, J., E. D. de Leeuw. 1994. „A comparison of nonresponse in mail, telephone, and face-to-face surveys. Applying multilevel modeling to meta-analysis." *Quality & Quantity* 28 (4): 329–344.

Jobson, J. D. 1991. *Applied Multivariate Data Analysis. Vol. 1. Regression and Experimental Design.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Kreft, I. G., J. de Leeuw. 1998. *Introducing Multilevel Modeling.* London: Sage Publications.

Lazarsfeld, P. F., H. Menzel. 1965. „On the Relation between Individual and Collective Properties." Pp. 422-440 in A. Etzioni (ed.). *Complex Organizations.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Ling, Zhu Ai. 2002. „What is a Meta-Analysis?" [online]. Singapore: Bioinformatics Institute [cit. 11. 4. 2006]. Dostupné z: <http://www.bii.a-star.edu.sg/docs/mig/MetaAnalysis.pdf>.

Long, S. 1997. *Regression Models for Categorical and Limited Dependent Data.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Longford, N. T. 1993. *Random Coefficient Models.* Oxford: Oxford University Press.

Menard, S. 2002. *Applied Logistic Regression Analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Matějů, P., J. Straková. 2006. „Víceletá gymnázia a jejich role v reprodukci vzdělanostních nerovností." Pp. 194–219 in P. Matějů, J. Straková (eds.). *(Ne)rovné šance na vzdělání.* Praha: Academia.

„PISA 2003 Database." [online]. 2003. Praha: OECD [cit. dne 28. 1. 2006]. Dostupné z: <http://pisaweb.acer.edu.au/oecd_2003/oecd_pisa_data.html>.

Raudenbush, S. W., A. S. Bryk. 2002. *Hierarchical Linear Models.* 2nd Edition. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Robinson, W. S. 1950. „Ecological Correlations and the Behaviour of Individuals." *American Sociological Review* 15: 351–357.

Řeháková, B. 2000. „Nebojte se logistické regrese." *Sociologický časopis* 36 (4): 475–492.

Snijders, Tom A. B., Roel J. Bosker. 1999. *Multilevel Analysis: An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling.* London, Thousand Oaks, CA: Sage Publications.